Шәкір Айдос

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

4-лекция. Постановка задачи интерполирования

Цель лекции – сформировать у студентов представление об основных методах интерполирования и развить навыки построения интерполяционных приближений функций по заданным узлам, а также умение анализировать точность интерполяции и оценивать погрешность полученных приближений.

План лекции:

1 Постановка задачи

Простейшая задача интерполирования заключается в следующем. На отрезке $[a, b]$ заданы $n+1$ точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, которые

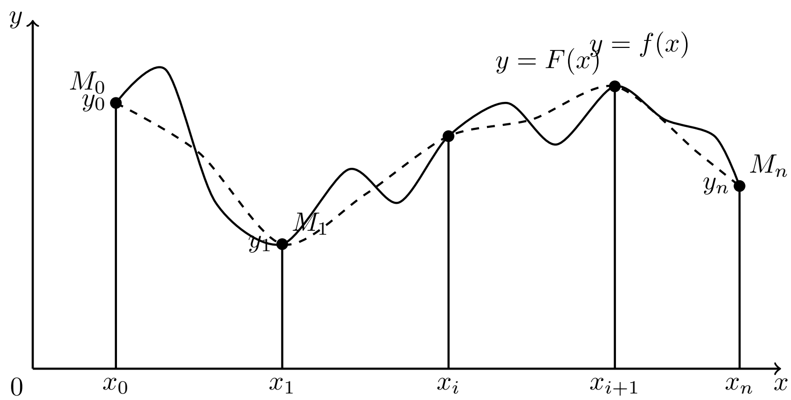

Рис. 1

называются *узлами интерполяции*, и значения некоторой функции $f(x)$ в этих точках:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad \ldots, \quad f(x_n) = y_n. \tag{1.1}$$

Требуется построить функцию $F(x)$ (*интерполирующую функцию*), принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, то есть такую, что

$$F(x_0) = y_0, \quad F(x_1) = y_1, \quad \ldots, \quad F(x_n) = y_n. \tag{1.2}$$

Геометрически это означает, что нужно найти кривую $y = F(x)$ некоторого определённого типа, проходящую через заданную систему точек $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ (рисунок-1).

В такой общей постановке задача может иметь бесчисленное множество решений или совсем не иметь решений. Однако эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать полином $P_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий условиям (1.2), то есть такой, что

$$P_n(x_0) = y_0, \quad P_n(x_1) = y_1, \quad \ldots, \quad P_n(x_n) = y_n.$$

Полученную интерполяционную формулу

$$y = F(x)$$

обычно используют для приближённого вычисления значений данной функции $f(x)$ для значений аргумента x, отличных от узлов интерполирования. Такая операция называется *интерполированием* *функции* $f(x)$. При этом различают интерполирование в узком смысле, когда $x \in [x_0, x_n]$, то есть значение x является промежуточным между x_0 и x_n, и *экстраполирование*, когда $x \notin [x_0, x_n]$. В дальнейшем под термином интерполирование мы будем понимать как первую, так и вторую операции.

2 Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть узлы интерполирования расположены равномерно:

$$x_i = x_0 + ih, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

где $h = \mathrm{const}$, и

$$y_i = f(x_i).$$

Тогда *первая интерполяционная формула Ньютона* имеет вид:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \tag{2.1}$$

где

$$q = \frac{x - x_0}{h},$$

а $\Delta y_0,\ \Delta^2 y_0,\ \ldots\ ,\ \Delta^n y_0$ — конечные разности. Формулу (2.1) выгодно использовать для интерполирования функции $y = f(x)$ в окрестности начального значения x_0, где q мало по абсолютной величине.

Если в формуле (2.1) положить $n = 1$, то получим формулу *линейного интерполирования*:

$$P_1(x) = y_0 + q\,\Delta y_0.$$

При $n = 2$ будем иметь формулу *параболического* или *квадратичного интерполирования*:

$$P_2(x) = y_0 + q\,\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\,\Delta^2 y_0.$$

Пример 1. Приняв шаг $h = 0{,}05$, построить на отрезке [3,5; 3,6] интерполяционный полином Ньютона для функции $y = e^x$, заданной таблицей:

x	3.50	3.55	3.60	3.65	3.70
y	33.115	34.813	36.598	38.475	40.447

Таблица 1: Таблица значений функции $y = e^x$

Решение. Составляем таблицу разностей . Заметим, что в столбцах разностей, следуя обычной практике, мы указываем десятичные разряды. Так как разности третьего порядка практически постоянны, то в формуле (2.1) полагаем $n = 3$. Приняв $x_0 = 3.50$, $y_0 = 33.115$, будем иметь:

$$P_3(x) = 33.115 + 1.698q + \frac{0.087}{2}\,q(q-1) + \frac{0.005}{6}\,q(q-1)(q-2),$$

или

$$P_3(x) = 33.115 + 1.698q + 0.0435\,q(q-1) + 0.00083\,q(q-1)(q-2),$$

где

$$q = \frac{x - 3.50}{0.05} = 20(x - 3.5).$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
3.50	33.115	1698	87	5
3.55	34.813	1785	92	3
3.60	36.598	1877	95	
3.65	38.475	1972		
3.70	40.447			

Таблица 2: Таблица разностей функции $y = e^x$

Пример 2. В таблице 3 приведены значения интеграла вероятностей

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Применяя первую интерполяционную формулу Ньютона, приближённо найти $\Phi(1.43)$.

Решение. Дополняем таблицу 3 конечными разностями функции $y = \Phi(x)$ до третьего порядка включительно. За x_0 принимаем ближайшее табличное значение к искомому значению $x = 1.43$, т. е. полагаем $x_0 = 1.4$. Так как $h = 0.1$, то

$$q = \frac{1.43 - 1.4}{0.1} = 0.3.$$

Подставляя в формулу (2.1), получим:

$$y \approx 0.9523 + 0.3 \cdot 0.0138 + \frac{0.3(0.3-1)}{2!}\,(-0.0036) + \frac{0.3(0.3-1)(0.3-2)}{3!} \cdot 0.0009.$$

Откуда

$$\Phi(1.43) \approx 0.95686.$$

(Табличное значение: $\Phi(1.43) = 0.9569$, см. таблицы функций Янке и Эмде.)

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1.0	0.8427	375	-74	10
1.1	0.8802	301	-64	10
1.2	0.9103	237	-54	9
1.3	0.9340	183	-45	9
1.4	0.9523	138	-36	9
1.5	0.9661	102	-27	5
1.6	0.9763	75	-22	6
1.7	0.9838	53	-16	4
1.8	0.9891	37	-12	
1.9	0.9928	25		
2.0	0.9953			

Таблица 3: Таблица разностей функции $y = \Phi(x)$

3 Вторая интерполяционная формула Ньютона

Пусть заданы значения функции $y = f(x)$ в узлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Вторая интерполяционная формула Ньютона записывается в виде:

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где Δy_i — конечные разности функции y. Введем удобную запись

$$q = \frac{x - x_n}{h},$$

тогда формула принимает вид

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \cdots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{3.2}$$

Пример. Дана таблица значений функции $y = \lg x$:

x	y
1000	3,000000
1010	3,0043214
1020	3,0086002
1030	3,0128372
1040	3,0170333
1050	3,0211893

Найти $\lg 1044$.

Решение. Составляем таблицу конечных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	43214	-426	2
1010	3,0043214	42788	-418	9
1020	3,0086002	42370	-409	8
1030	3,0128372	41961	-401	
1040	3,0170333	41560		
1050	3,0211893			

Берем $x_n = 1050$, шаг $h = 10$, тогда

$$q = \frac{1044 - 1050}{10} = -0.6$$

Используя формулу Ньютона, получаем:

$$\lg 1044 \approx 3,0211893 + (-0.6) \cdot 0,0041560 \quad + \frac{(-0.6)(-0.6+1)}{2} \cdot 0,00000401$$
$$+ \frac{(-0.6)(-0.6+1)(-0.6+2)}{6} \cdot 0,00000008 = 3,0187005$$

4 Интерполяционная формула Гаусса

Пусть x_0 — центральный узел таблицы, h — шаг, $t = \frac{x-x_0}{h}$, а $\Delta^k f_i$ — центральные разности.

Первая формула Гаусса (точка около x_0)

$$f(x) = f_0 + t\,\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\,\Delta^2 f_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!}\,\Delta^3 f_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\,\Delta^4 f_{-2} + \dots$$

Вторая формула Гаусса (точка после x_0)

$$f(x) = f_0 + t\,\Delta f_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\,\Delta^2 f_{-1} + \frac{t(t+1)(t-1)}{3!}\,\Delta^3 f_{-2} + \frac{t(t+1)(t-1)(t-2)}{4!}\,\Delta^4 f_{-2} + \dots$$

Схема узлов для центральных разностей

5 Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть заданы $n+1$ узлов $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$, $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$.

Формула Лагранжа

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i\,L_i(x),$$

где базисные многочлены Лагранжа определяются как

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{5.1}$$

Свойство

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Пример 1. Для функции $y = \sin \pi x$ построить интерполяционный полином Лагранжа, выбрав узлы

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{6}, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Решение. Вычисляем соответствующие значения функции:

$$y_0 = 0, \qquad y_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \qquad y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Применяя формулу (5.1), получим:

$$L_2(x) = \frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(0-\frac{1}{6})(0-\frac{1}{2})}\cdot 0 + \frac{x(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{6}-0)(\frac{1}{6}-\frac{1}{2})}\cdot\frac{1}{2} + \frac{x(x-\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})}\cdot 1.$$

или

$$L_2(x) = \frac{7}{2}x - 3x^2.$$

Пример 2. Дана таблица значений функции $y = f(x)$:

x	y
321,0	2,50651
322,8	2,50893
324,2	2,51081
325,0	2,51188

Вычислить значение $f(323{,}5)$.

Решение. Положим $x = 323{,}5$, $n = 3$. Тогда по формуле (5.1) будем иметь:

$$\begin{aligned} f(323{,}5) = {} & \frac{(323{,}5-322{,}8)(323{,}5-324{,}2)(323{,}5-325{,}0)}{(321-322{,}8)(321-324{,}2)(321-325)} \cdot 2{,}50651 \\ & + \frac{(323{,}5-321)(323{,}5-324{,}2)(323{,}5-325)}{(322{,}8-321)(322{,}8-324{,}2)(322{,}8-325)} \cdot 2{,}50893 \\ & + \frac{(323{,}5-321)(323{,}5-322{,}8)(323{,}5-325)}{(324{,}2-321)(324{,}2-322{,}8)(324{,}2-325)} \cdot 2{,}51081 \\ & + \frac{(323{,}5-321)(323{,}5-322{,}8)(323{,}5-324{,}2)}{(325-321)(325-322{,}8)(325-324{,}2)} \cdot 2{,}51188 \\ & = -0{,}07996 + 1{,}18794 + 1{,}83897 - 0{,}43708 \\ & = 2{,}50987. \end{aligned}$$

6 Контрольные вопросы

1. Что называется интерполяционным многочленом и в чём состоит задача интерполирования?
2. Запишите общий вид интерполяционного многочлена Лагранжа для $n + 1$ узлов.
3. Что такое базисные многочлены Лагранжа $L_i(x)$ и какими свойствами они обладают?
4. В чём заключается отличие интерполяционной формулы Ньютона от формулы Лагранжа?
5. Что такое разделённые разности и как строится таблица разделённых разностей?
6. Запишите интерполяционный многочлен Ньютона через разделённые разности.
7. Для каких случаев применяется первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона (вперёд/назад)?
8. В чём состоит идея интерполяционной формулы Гаусса и когда она применяется?

9. Чем отличаются первая и вторая формулы Гаусса, и как выбирается центральный узел?

10. От чего зависит погрешность интерполирования и как записывается остаточный член для интерполяционного многочлена?

7 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–16].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Копченова, Н. В., и И. А. Марон. *Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2019.

[2] Самарский, А. А., и А. В. Гулин. *Численные методы: Учебное пособие для вузов*. Москва: Наука, 1989.

[3] Киреев, В. И., и А. В. Пантелеев. *Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2015.

[4] Kiusalaas, Jaan. *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

[5] Демидович, Б. П., и И. А. Марон. *Основы вычислительной математики: Учебное пособие*. 8-е изд. Санкт-Петербург: Лань, 2022.

[6] Шакенов, Қ. Қ. *Есептеу математикасы әдістері: лекциялар курсы*. Алматы: 2019.

[7] Сұлтанғазин, Ө. М., және С. Атанбаев. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы*. Алматы: Білім, 2016.

[8] Демидович, В. П., және Е. Б. Марон. *Основы вычислительной математики*. Москва: Наука, 1970.

[9] Уиттекер, Э., и Г. Робинсон. *Математическая обработка результатов наблюдений*. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1933. Гл. I.

[10] Гончаров, В. Л. *Теория интерполирования и приближения функций.* Москва–Ленинград: ГТТИ, 1934. Гл. I, §§ 18–21.

[11] Скарборо, Дж. *Численные методы математического анализа.* Москва–Ленинград: ГТТИ, 1934. IV, разд. II.

[12] Брадис, В. М. *Теория и практика вычислений.* Москва: Учпедгиз, 1935. Гл. IX.

[13] Милн, В. Э. *Численный анализ.* Москва: ИЛ, 1961. Гл. III, VI.

[14] Ремез, Е. Я. *Общие вычислительные методы чебышевского приближения.* Киев: Изд. АН УССР, 1957. Ч. 1, Гл. I.

[15] Леднев, Н. А., ред. *Математический практикум на счетно-вычислительных приборах и инструментах.* Москва: Советская наука, 1959. Гл. III.

[16] Фаддеева, В. Н. *Вычислительные методы линейной алгебры.* Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1950. Гл. III, § 27.